Gabarito da Prova da Primeira Fase

15 de Maio de 2010

Questão 1 ***10 pontos***

Um tanque de combustível, cuja capacidade é de 2000 *litros, tinha* 600 *litros de uma mistura homogênea formada por* 25 % *de álcool e* 75 % *de gasolina. Considerando que foram utilizados* 20 % *dessa mistura, quantos litros de gasolina devem ser colocados no referido tanque de modo que a mistura resultante tenha* 90 % *de gasolina?*

Resolução

Como foram consumidos 20 % da mistura inicial, ficamos com um total de 480 litros. Sabemos que 25 % é de álcool, que corresponde a 120 litros, e que 75 % é de gasolina, que corresponde a 360 litros.

Como agora queremos uma mistura com 90 % de gasolina, logo temos somente 10 % de álcool nessa mistura, que são os 120 litros existente na mistura original. Assim, a nova mistura deve ter um total de 1200 litros, onde 90 % é de gasolina, que corresponde a 1080 litros. Como já existem 360 litros de gasolina, basta misturar 720 litros de gasolina para obtermos a mistura desejada.

Questão 2 ***10 pontos***

Determine dois números reais de modo que a soma seja igual a 60 *e a diferença de seus quadrados seja igual a* 720.

Resolução

Temos que determinar dois números reais, que denotamos por a e b, que satisfazem as seguintes equações algébricas

$$\begin{cases} a + b = 60 \\ a^2 - b^2 = 720 \end{cases}$$

que podem ser reescritas da forma:

$$\begin{cases} a + b = 60 \\ (a + b)(a - b) = 720 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda equação, obtemos

$$60(a - b) = 720 \iff a - b = 12 \iff a = 12 + b\,.$$

Substituindo a expressão de a, que está em função de b, na primeira equação, obtemos

$$12 + 2b = 60 \iff b = 24\,.$$

Portanto, encontramos $a = 36$ e $b = 24$, satisfazendo as duas condições desejadas.

Questão 3 ***10 pontos***

Encontre a diferença entre a soma dos 50 *primeiros números naturais pares e a soma dos* 50 *primeiros números naturais ímpares.*

Primeira Proposta de Resolução

Note que os 50 primeiros números pares são:

$$2 \quad , \quad 4 \quad , \quad 6 \quad , \quad \cdots \quad , \quad 100 \, ,$$

que são representados da seguinte forma: $2n$ para $n = 1, 2, 3, \cdots, 50$.

Os 50 primeiros números ímpares são:

$$1 \quad , \quad 3 \quad , \quad 5 \quad , \quad \cdots \quad , \quad 99 \, ,$$

que são representados da seguinte forma: $2n - 1$ para $n = 1, 2, 3, \cdots, 50$.

É importante observar que estamos considerando o conjunto do números naturais

$$I\!N = \{ 1, 2, 3, \cdots \} \, .$$

Assim, temos que

$$(2 + 4 + 6 + \cdots + 100) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 99) \, ,$$

que pode ser reordenado da seguinte forma:

$$(2 - 1) + (4 - 3) + (6 - 5) + \cdots + (100 - 99) = 50 \, .$$

Segunda Proposta de Resolução

Note que os números pares podem ser representados por uma Progressão Aritmética cujo primeiro termo é $a_1 = 2$ e de razão $r = 2$.

Assim, a soma dos 50 primeiros números pares é escrita da forma:

$$S_p = \frac{50(2 + 100)}{2} = 2550 \, ,$$

uma vez que $a_{50} = 100$.

Os números ímpares podem ser representados por uma Progressão Aritmética cujo primeiro termo é $a_1 = 1$ e de razão $r = 2$.

Assim, a soma dos 50 primeiros números ímpares é escrita da forma:

$$S_i = \frac{50(1 + 99)}{2} = 2500 \, ,$$

uma vez que $a_{50} = 99$.

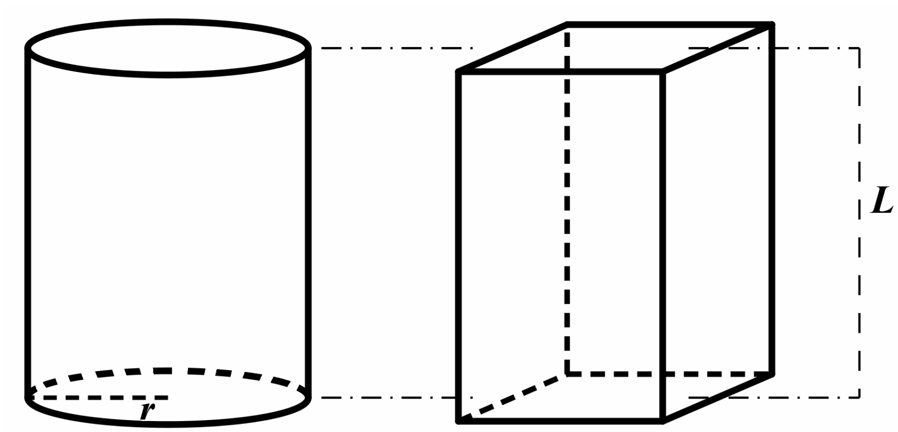
Portanto, obtemos $S_p - S_i = 50$.

Questão 4 ***10 pontos***

Considere um copo no formato de um cilindro circular reto, com altura L e raio da base r, e um copo no formato de um paralelepípedo com uma base quadrada e altura L, como na figura abaixo.

(a) Determine a área da base do copo no formato de um paralelepípedo de modo que tenha o mesmo volume do copo cilíndrico.

(b) Considerando o caso em que os dois copos tem o mesmo volume, determine o copo que tem a área da superfície menor. Justifique sua resposta.



Resolução

(a) Vamos denotar por V_c o volume do copo cilíndrico, que é igual a $V_c = \pi r^2 L$, e denotamos por V_p o volume do copo no formato de um paralelepípedo, com uma base quadrada, que é igual a $V_p = a^2 L$, onde a é o comprimento do lado da base quadrada. Assim, devemos ter

$$\pi r^2 L = a^2 L \quad \Longleftrightarrow \quad \pi r^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad a = r\sqrt{\pi}\ ,$$

para que os dois copos tenham o mesmo volume.

(b) Vamos denotar por S_c a área da superfície do copo cilíndrico, que é igual a

$$S_c = \pi r^2 + 2\pi r L\ ,$$

que corresponde a área da base mais a área da superfície lateral do cilindro. E vamos denotar por S_p a área da superfície do copo no formato de paralelepípedo, com o mesmo volume do copo cilíndrico, que é igual a

$$S_p = \pi r^2 + 4\sqrt{\pi} r L\ ,$$

que corresponde a área da base mais a área da superfície lateral do paralelepípedo.

Note que S_p pode ser escrito da seguinte forma:

$$S_p \;=\; \pi r^2 \;+\; (\,2\pi L r\,)\left(\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}\right)$$

Desse modo, o copo cilíndrico tem a área da superfície menor que a do copo no formato de um paralelepípedo, com o mesmo volume do copo cilíndrico.

De fato, comparando as expressões de S_c e S_p, observamos que

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \;>\; 1 \;,$$

tendo em vista que

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \;>\; 1 \quad\Longrightarrow\quad 2\sqrt{\pi} \;>\; \pi \quad\Longrightarrow\quad 4\pi \;>\; \pi^2 \quad\Longrightarrow\quad 4 \;>\; \pi \;,$$

onde utilizamos que $f(a) \,=\, a^2$, para $a \,\in\, I\!R$, é uma função crescente. Assim, $S_c \,<\, S_p$.

Questão 5 ***10 pontos***

De quantas maneiras podemos decompor o número natural 2010 *em um produto de dois inteiros positivos?*

Resolução

Podemos verificar facilmente que

$$2010 \,=\, 2 \times 3 \times 5 \times 67\,.$$

Desse modo, os divisores possíveis de 2010 são todos da seguinte forma:

$$2^i \times 3^j \times 5^k \times 67^l\,,$$

onde os índices $i,\, j,\, k,\, l \,\in\, \{\,0,\,1\,\}$. Sendo assim, existem $2 \times 2 \times 2 \times 2 \,=\, 16$ maneiras de escolher os índices $i,\, j,\, k,\, l$. Logo, concluímos que 2010 possui 16 divisores. Como 2010 tem um número par de divisores, então eles podem ser tomados aos pares para decompor 2010 em um produto de dois inteiros positivos. Portanto, existem 8 maneiras diferentes de escrever o número natural 2010 como um produto de dois inteiros positivos. É importante observar que

$$30 \times 67 \qquad \text{e} \qquad 67 \times 30$$

é a mesma decomposição de 2010.

Questão 6 **_10 pontos_**

As idades do Petronio, da Laura, da Claudina e do Marcelo são quatro números pares consecutivos. Sabendo que a soma dessas idades é igual a 204, *qual é a idade do mais velho?*

Resolução

Vamos denotar as idades da seguinte forma:

$$2n \quad , \quad 2n + 2 \quad , \quad 2n + 4 \quad , \quad 2n + 6 \; .$$

Assim, sabemos que

$$2n \; + \; (\, 2n \; + \; 2\,) \; + \; (\, 2n \; + \; 4\,) \; + \; (\, 2n \; + \; 6\,) \; = \; 204 \; ,$$

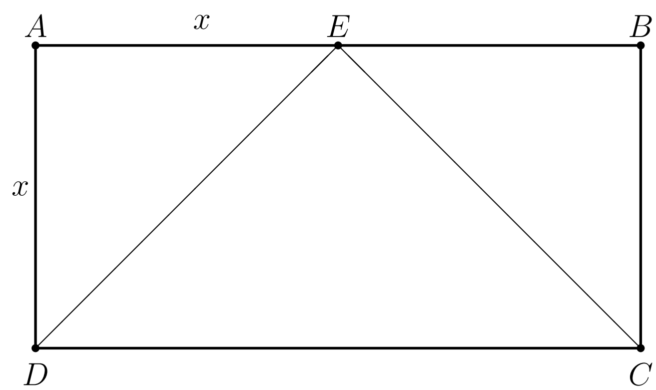
obtendo a seguinte equação

$$8n \; + \; 12 \; = \; 204 \; ,$$

cuja solução é $n \; = \; 24$. Portanto, o mais velho tem 54 anos.

Questão 7 ***10 pontos***

O retângulo $ABCD$ é formado por três triângulos isósceles, como mostra a figura abaixo. Sabendo que $\overline{AE} = \overline{AD} = x$, determine o perímetro e a área do triângulo isósceles CDE, em função do parâmetro x.



Resolução

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos ADE e BCE, obtemos

$$\overline{DE} = x\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad \overline{CE} = x\sqrt{2}\,.$$

Além disso, como $\overline{AE} = \overline{BE} = x$, tem–se que $\overline{AB} = \overline{CD} = 2x$.

Assim, a área do triângulo isósceles CDE é igual a x^2, e o perímetro é igual a $2x + 2x\sqrt{2}$.

Questão 8 ***10 pontos***

Uma colomba Pascal está embalada numa requintada lata ornamentada. O peso total desse produto, isto é, a soma do peso da colomba Pascal e o peso da Lata, é igual a 800 *gramas. Depois de terem sido consumidos* $60\,\%$ *da colomba Pascal, o peso total passa a ser igual a* 416 *gramas. Determine o peso da lata.*

Resolução

Vamos denotar por L o peso da lata e por C o peso da colomba Pascal. Consumindo $60\,\%$ da colomba Pascal, sobra somente $40\,\%$, isto é, $0,4C$. Desse modo, temos duas equações algébricas

$$\begin{cases} L \;+\; C \;=\; 800 \\ L \;+\; 0,4C \;=\; 416 \end{cases}$$

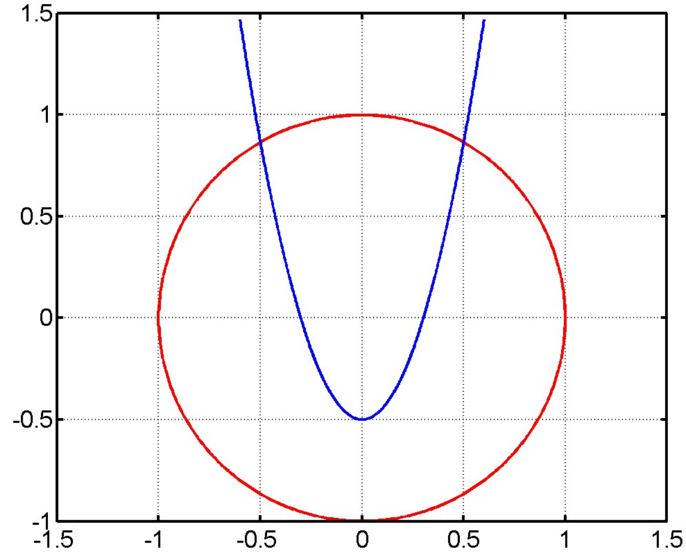
Subtraindo a segunda equação da primeira equação, obtemos

$$0,6C \;=\; 384 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C \;=\; 640\,.$$

Portando, a colomba Pascal pesa 640 gramas e a lata pesa 160 gramas.

Questão 9 ***10 pontos***

Determine a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$*, cujo gráfico está representado na figura abaixo, isto é,* $f(0) = -\frac{1}{2}$*, e os pontos* $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ *e* $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ *pertencem à circunferência de centro* $C = (0,0)$ *e raio* $r = 1$*.*



Primeira Proposta de Resolução

Como $f(0) = -\frac{1}{2}$, obtemos $c = -\frac{1}{2}$. Note também que f é uma função par, uma vez que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. Logo, devemos ter $b = 0$.

Assim, ficamos com a seguinte função quadrática $f(x) = ax^2 - \frac{1}{2}$, bastando agora determinar o valor do parâmetro a através do valor $f\left(\frac{1}{2}\right)$, uma vez que a função é par.

Para isso, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABC, cujos vértices são os seguintes pontos no plano cartesiano:

$$A = (0,0) \quad , \quad B = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \qquad \text{e} \qquad C = \left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) ,$$

obtemos

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 \iff 1 = \frac{1}{4} + \left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \implies f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Finalmente, obtemos

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \iff \qquad a = 2(\sqrt{3} + 1) .$$

Segunda Proposta de Resolução

Como $f(0) = -\dfrac{1}{2}$, obtemos $c = -\dfrac{1}{2}$. Note também que f é uma função par, uma vez que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. Logo, devemos ter $b = 0$.

Assim, ficamos com a seguinte função quadrática $f(x) = ax^2 - \dfrac{1}{2}$, bastando agora determinar o valor do parâmetro a através do valor $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, uma vez que a função é par.

Para isso, vamos utilizar o fato que o ponto

$$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

pertence à circunferência de centro $C = (0,0)$ e raio $r = 1$, cuja equação é dada por:

$$x^2 + y^2 = 1 .$$

Assim, temos que

$$\frac{1}{4} + \left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Finalmente, obtemos

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 2(\sqrt{3} + 1) .$$

Portanto, a função quadrática procurada é escrita da seguinte forma:

$$f(x) = (2\sqrt{3} + 2)x^2 - \frac{1}{2} .$$

Questão 10 ***10 pontos***

Em uma reunião social participam dez amigos, que trocam cumprimentos entre si. Determine quantos cumprimentos foram trocados.

Resolução

Vamos denotar os dez amigos por A_1, A_2, $\cdots$ A_{10}. Desse modo, temos que

$$\begin{array}{rcl} A_1 \text{ cumprimenta os amigos } A_2, \cdots, A_{10} & = & 9 \text{ cumprimentos} \\ A_2 \text{ cumprimenta os amigos } A_3, \cdots, A_{10} & = & 8 \text{ cumprimentos} \\ A_3 \text{ cumprimenta os amigos } A_4, \cdots, A_{10} & = & 7 \text{ cumprimentos} \\ \vdots & & \vdots \\ A_8 \text{ cumprimenta os amigos } A_9 \text{ e } A_{10} & = & 2 \text{ cumprimentos} \\ A_9 \text{ cumprimenta o amigo } A_{10} & = & 1 \text{ cumprimento} \end{array}$$

Portanto, o número total de cumprimentos será calculado da seguinte forma:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45,$$

uma vez que temos a soma dos nove primeiros termos de uma progressão aritmética com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = 1$.