Gabarito da Prova da Primeira Fase – Nível Beta

Questão 1 ***20 pontos***

Considere um triângulo retângulo tal que a soma da medida de um dos catetos com a medida da hipotenusa é igual a três meios da medida do outro cateto. Sabendo–se que as medidas dos lados deste triângulo são números primos entre si, determine o seu perímetro e a sua área.

Resolução

Sejam a e b as medidas dos catetos e c a medida da hipotenusa. Somente para não ter que distinguir depois, admita $c > b$. É dado do problema que a, b e c são números primos entre si (a fim de que tenhamos solução única) e que vale a relação

$$c + a = \frac{3}{2}b \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = \frac{3}{2}b - a\,.$$

Como temos um triângulo retângulo, substituímos a expressão da medida da hipotenusa no teorema de Pitágoras, obtendo

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{9}{4}b^2 - 3ba + a^2 = a^2 + b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{5}{4}b^2 - 3ba = 0\,.$$

que, após simplificação, fornece

$$\frac{b}{4}(5b - 12a) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = \frac{12}{5}a\,.$$

Desta relação obtemos

$$a = 5, 10, 15, \ldots \qquad \text{e} \qquad b = 12, 24, 36, \ldots\,.$$

Com estes valores, voltamos na relação fornecida no enunciado de modo que

$$c = 13, 26, 39, \ldots\,.$$

Então, visto que os números são primos entre si, resta somente a opção

$$a = 5 \quad , \quad b = 12 \quad \text{e} \quad c = 13\,,$$

o que fornece, respectivamente, para o perímetro $P = 5 + 12 + 13 = 30$ unidades de comprimento e para a área $A = \dfrac{5 \times 12}{2} = 30$ unidades de área.

Questão 2 ***20 pontos***
Uma palavra, uma cadeia de caracteres ou uma frase que quando fazemos sua leitura tanto da direita para a esquerda quanto da esquerda para a direita tem o mesmo significado é chamada de palíndromo. Quantos são os anagramas de uma palíndromo de cinco caracteres?

Resolução

Por simplicidade vamos utilizar símbolos para representar os quatro tipos de palíndromos de cinco caracteres. Considerando permutações de cinco elementos com repetição, obtemos o número de anagramas possíveis.

Tipo 1: Palíndromo de 3 caracteres distintos.

$$\oplus \quad \bigcirc \quad \otimes \quad \bigcirc \quad \oplus$$

como por exemplo a palavra **MIRIM**.

Observe que os dois últimos caracteres são determinados pelo significado de um palíndromo.

Nesse caso o número de anagramas possíveis é:

$$\frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30 \,.$$

Tipo 2: Palíndromo de 2 caracteres distintos, com os dois primeiros iguais.

$$\oplus \quad \oplus \quad \bigcirc \quad \oplus \quad \oplus$$

Nesse caso o número de anagramas possíveis é:

$$\frac{5!}{4!\,1!} = 5 \,.$$

Tipo 3: Palíndromo de 2 caracteres distintos, com o primeiro e terceiro iguais

$$\bigcirc \quad \oplus \quad \bigcirc \quad \oplus \quad \bigcirc$$

como por exemplo a palavra **ARARA**, ou com o segundo e terceiro iguais

$$\bigcirc \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus \quad \bigcirc$$

Nesse caso o número de anagramas possíveis é:

$$\frac{5!}{2!\,3!} = 10 \,.$$

Tipo 4: Palíndromo de apenas um caracter.

$$\bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc$$

Nesse caso o número de anagramas possíveis é:

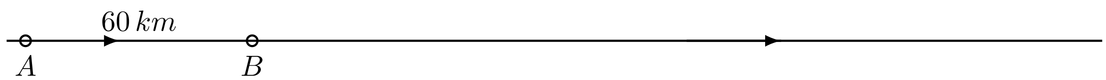
$$\frac{5!}{5!} = 1 \,.$$

Questão 3 ***20 pontos***

Dois veículos viajam numa rodovia retilínea e partem ao mesmo tempo de dois pontos distintos A e B que distam $60\,km$. O veículo que partiu do ponto A tem uma velocidade constante de $100\,km/h$ e o veículo que partiu de B tem uma velocidade constante de $80\,km/h$. Os veículos viajam no sentido do ponto A para o ponto B.

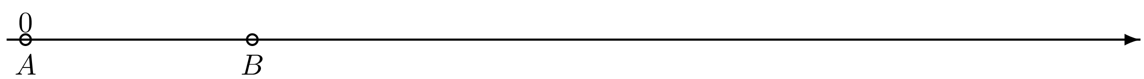
(a) Depois de quanto tempo do início da viagem os dois veículos se encontram?

(b) A que distância do ponto A os dois veículos de encontram?



Resolução

Vamos colocar um referencial na posição inicial do carro A, como ilustra a figura abaixo.



Assim, a posição do carro A num instante de tempo t, que vamos denotar por $E_A(t)$, e posição do carro B num instante de tempo t, que vamos denotar por $E_B(t)$, podem ser escritos da seguinte forma:

$$E_A(t) \;=\; 100\,t \qquad , \qquad E_B(t) \;=\; 80\,t \;+\; 60\,.$$

Desse modo, para encontrar em qual tempo os depois carros estarão na mesma posição basta resolver a seguinte equação

$$100\,t \;=\; 80\,t \;+\; 60 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 20\,t \;=\; 60 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t \;=\; 3\,.$$

Portanto, depois de três horas do início da viagem os dois veículos estarão na mesma posição.

Finalmente, substituindo $t = 3$ na equação de movimento de cada um dos veículos, obtemos

$$E_A(t=3) \;=\; 3 \times 100 \;=\; 300 \qquad , \qquad E_B(t=3) \;=\; 3 \times 80 \;+\; 60 \;=\; 300\,.$$

Portanto, os dois veículos se encontram a 300 quilômetros do ponto A.

Questão 4 ***20 pontos***

Considere os seguintes conjuntos

$$A_1 = \{1\} \quad , \quad A_2 = \{2, 3\} \quad , \quad A_3 = \{4, 5, 6\} \quad , \quad A_4 = \{7, 8, 9, 10\} ,$$

construídos com a seguinte regra:

$A_1 = \{1\}$ *e o n–ésimo conjunto* A_n *tem* n *números naturais consecutivos sendo o seu primeiro elemento o número natural*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + 1 \qquad , \qquad n > 1 .$$

Determine a soma dos elementos do conjunto A_{16}.

Resolução

O primeiro elemento do conjunto A_n é escrito da seguinte forma:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + 1 = \frac{(n-1)n}{2} + 1 .$$

Desse modo, o conjunto A_n que possui n elementos é dado por:

$$A_n = \left\{ \frac{(n-1)n}{2} + 1 , \frac{(n-1)n}{2} + 2 , \cdots , \frac{(n-1)n}{2} + n \right\} .$$

Denotando por S_n a soma dos elementos do conjunto A_n temos que

$$S_n = n\frac{(n-1)n}{2} + 1 + 2 + \cdots + n = n\frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^3 + n}{2} .$$

Portanto, a soma dos elementos do conjunto A_{16} é dada por:

$$S_{16} = \frac{16^3 + 16}{2} = 2056 .$$

Questão 5 ***20 pontos***

(a) Determine quantos divisores tem o número natural $m = 1260$.

(b) Determine o menor número natural que tem exatamente 14 *divisores.*

Resolução

(a) O número de divisores positivos de um número natural é igual ao produto dos expoentes dos números que aparecem em sua fatoração, adicionando a cada um deles uma unidade, ou seja, se a fatoração do número é dada por:

$$N = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \cdots \times p_s^{k_s} ,$$

onde $p_1, p_2, \cdots, p_s$ são números primos e $k_1, k_2, \cdots, k_s$ são as potências necessárias para a fatoração, então o número de divisores do número N é igual a $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_s + 1)$.

O número natural $m = 1260$ tem a seguinte fatoração:

$$1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 .$$

Desse modo, o número natural $m = 1260$ possui $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ divisores.

(b) Com estes resultados, podemos provar que 192 é o menor número natural que tem exatamente 14 divisores. De fato, o problema dá como informação que

$$(k_1 + 1) \times (k_2 + 1) \times \cdots \times (k_s + 1) = 14 .$$

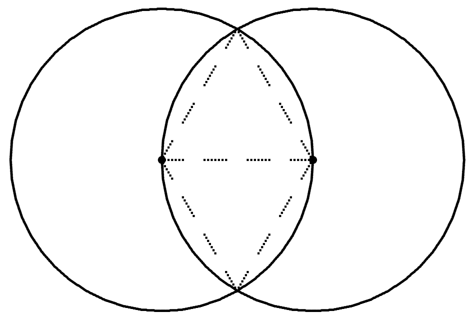
Mas 14 por sua vez só pode ser fatorado da seguinte forma: $14 = 2 \times 7$. Assim temos duas informações que são traduzidas nas seguintes equações:

$$k_1 + 1 = 2 \qquad \text{e} \qquad k_2 + 1 = 7$$

de onde concluímos que as duas potências para a fatoração do número proposto são $k_1 = 1$ e $k_2 = 6$. Não sabemos ainda quais os primos que seriam as bases para estas potências. Mas o problema pede o menor número possível que tenha 14 divisores. Desta forma vamos usar os dois menores números primos possíveis, a saber, 2 e 3. Devemos então testar os dois casos: $2^1 \times 3^6 = 1458$ e $2^6 \times 3^1 = 192$. Portanto 192 é o número procurado, pois é o menor entre os dois casos.

Questão 6 ***20 pontos***

Desenhe dois círculos de raio R de forma que a circunferência de um dos círculos passa pelo centro do outro círculo, como ilustra a figura abaixo. Qual é a área da intersecção desses dois círculos?



Resolução

Precisamos considerar a área do triângulo equilátero de lado R e uma fatia do círculo de raio R e abertura 60^o, como ilustra a figura acima.

A área do triângulo equilátero, que vamos denotar por A_T, é dada por:

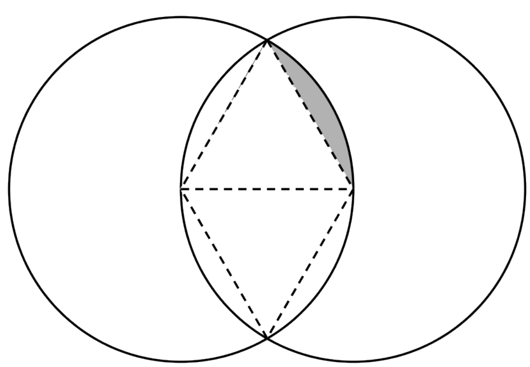
$$A_T \ = \ \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$$

e a área da fatia do círculo é um sexto da área total do círculo

$$\frac{\pi}{6}R^2 \ .$$

Na figura abaixo a região sombreada é a região entre o triângulo equilátero e o setor circular, cuja área é dada por:

$$A_{\mathcal{R}} \ = \ \frac{\pi}{6}R^2 \ - \ \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$$



Desse modo, área da intersecção dos dois círculos é dada por:

$$4A_{\mathcal{R}} \ + \ 2A_T \ = \ 4\left(\frac{\pi}{6}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) \ + \ 2\frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \ = \ \left(\frac{2}{3}\pi \ - \ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2 \ .$$