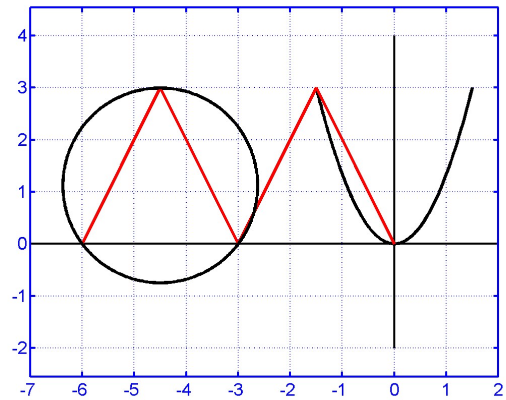


Gabarito da Prova da Primeira Fase – Nível Beta

Questão 1 ***20 pontos***

A reta representada pela equação $y + x = 0$ *intercecta a circunferência de centro* $O = (0,0)$ *e raio* $r = 2$ *nos pontos* A *e* B*, e a reta dada pela equação* $y - x = 0$ *intercecta essa mesma circunferência nos pontos* C *e* D*. Determine a área do quadrilátero definido pelos pontos* A, B, C *e* D*. Inicialmente faça a representação gráfica do problema descrito.*

Resolução

Para determinar os pontos de intersecção da circunferência e a reta dada pela equação $y + x = 0$, precisamos determinar as soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2 \\ y + x = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema acima, obtemos $y = -x$, que substituindo na primeira equação obtemos as seguintes soluções

$$x = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{2}\,.$$

$$x = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{2}\,.$$

Portanto, os pontos de intersecção são dados por:

$$A = (\sqrt{2}\,, -\sqrt{2}\,) \quad \text{e} \quad B = (-\sqrt{2}\,, \sqrt{2}\,)\,.$$

Para determinar os pontos de intersecção da circunferência e a reta dada pela equação $y - x = 0$, precisamos determinar as soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema acima, obtemos $y = x$, que substituindo na primeira equação obtemos as seguintes soluções

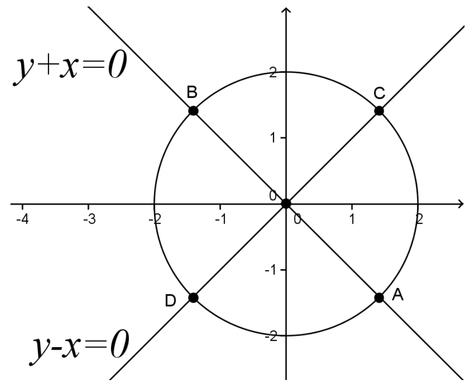
$$x = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{2}\,.$$

$$x = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{2}\,.$$

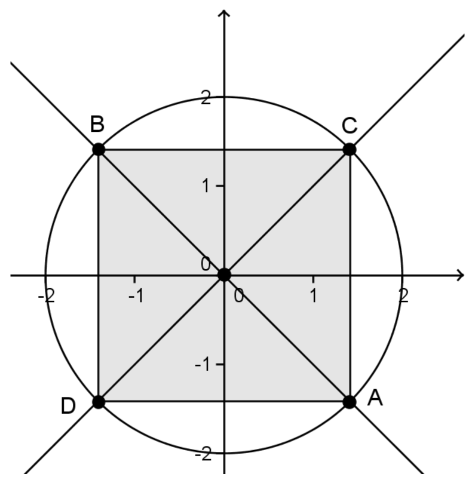
Portanto, os pontos de intersecção são dados por:

$$C = (\sqrt{2}\,, \sqrt{2}\,) \quad \text{e} \quad D = (-\sqrt{2}\,, -\sqrt{2}\,)\,.$$

A interpretação geométrica para os sistemas descritos acima e suas respectivas soluções é dada pela figura abaixo.



É fácil visualizar que o quadrilátero determinado pelos pontos A, B, C e D é o quadrado $ACBD$, como ilustra a figura abaixo.



Como o lado do quadrado $ACBD$ mede $L = 2\sqrt{2}$, temos que a área do quadrado é igual a $A_Q = (2\sqrt{2})^2 = 8$.

Questão 2 ***20 pontos***

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} kx + y = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ y + kz = 0 \end{cases}$$

Determine os valores reais para a constante k *para os quais*

(a) *O sistema linear admita apenas a solução trivial, isto é,* $x = y = z = 0$.

(b) *O sistema linear admita infinitas soluções reais.*

(c) *O sistema linear não admita solução real.*

Resolução

Primeiramente vamos analisar o sistema linear para $k = 0$. Se $k = 0$ ficamos com o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Desse modo, o sistema linear admite as seguintes soluções reais

$$x = \lambda \quad , \quad y = 0 \quad \text{e} \quad z = -\lambda \, ,$$

para todo $\lambda \in I\!R$. Portanto para $k = 0$ o sistema linear admite infinitas soluções reais.

Se $k \neq 0$, da primeira equação e da terceira equação, obtemos

$$x = -\frac{y}{k} \quad \text{e} \quad z = -\frac{y}{k} \, ,$$

que substituindo na segunda equação temos

$$-\frac{y}{k} + ky + -\frac{y}{k} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (k^2 - 2)y = 0 \, .$$

Esta equação implica duas possibilidades:

(a) Se $k^2 - 2 \neq 0$, isto é, $k \neq \pm\sqrt{2}$, temos $y = 0$. Assim, o sistema linear admite somente a solução trivial $x = y = z = 0$.

(b) Se $k^2 - 2 = 0$, isto é, $k = \pm\sqrt{2}$.

Quando $k = \sqrt{2}$ o sistema linear admite as seguintes soluções reais:

$$x = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = \lambda \quad \text{e} \quad z = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \, ,$$

para todo $\lambda \in I\!R$.

Quando $k = -\sqrt{2}$ o sistema linear admite as seguintes soluções reais:

$$x = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = \lambda \quad \text{e} \quad z = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \, ,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Portanto, para $k = \pm\sqrt{2}$ o sistema linear admite infinitas soluções reais.

Finalmente, podemos concluir que:

- O sistema linear admite apenas a solução trivial quando $k \neq \pm\sqrt{2}$ e $k \neq 0$.
- O sistema linear admite infinitas soluções reais quando $k = \sqrt{2}$, ou $k = -\sqrt{2}$, ou $k = 0$.
- Não existem valores para k de forma que o sistema linear não admita solução real.

Questão 3 ***20 pontos***

Seja $A = [a_{ij}]$ *uma matriz real de ordem* n*. Dizemos que* A *é uma* ***matriz anti–simétrica*** *se* $A^t = -A$*, onde* A^t *é a matriz transposta da matriz* A*, isto é,*

$$a_{ji} = -a_{ij} \qquad \text{para} \qquad i, j = 1, 2, 3, \cdots, n \,.$$

(a) Exiba uma matriz anti–simétrica de ordem 3*.*

(b) Seja $A = [a_{ij}]$ *uma matriz anti–simétrica de ordem* n*. Mostre que os elementos da diagonal principal de* A *são todos nulos, isto é,* $a_{ii} = 0$ *para* $i = 1, 2, 3, \cdots, n$*.*

Resolução

(a) A matriz A dada abaixo é uma matriz anti–simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

De fato, é fácil ver que $A^t = -A$.

(b) Considerando que $A = [a_{ij}]$ é uma matriz anti–simétrica, temos

$$a_{ji} = -a_{ij} \qquad \text{para} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \,.$$

Assim, tomando os elementos da diagonal principal, temos

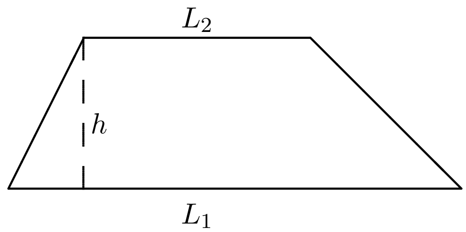
$$a_{ii} = -a_{ii} \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_{ii} = 0 \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \,.$$

Questão 4 ***20 pontos***

Mostre que a área do trapézio é dada por:

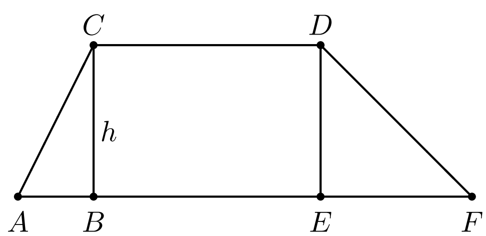
$$\mathcal{A}_T = \frac{h}{2}(L_1 + L_2),$$

onde L_1 *é o comprimento da base maior,* L_2 *é o comprimento da base menor e* h *é a altura do trapézio.*



Resolução

Considere a figura abaixo.



Assim, podemos observar que a área do trapézio é igual a área do triângulo ABC mais a área do triângulo DEF mais a área do retângulo $BCDE$.

Desse modo, podemos escrever a área do trapézio da seguinte forma:

$$\mathcal{A}_T = \frac{h \times \overline{AB}}{2} + \frac{h \times \overline{EF}}{2} + h \times L_2 .$$

Note que $L_2 = \overline{CD} = \overline{BE}$ e que $L_1 = \overline{AB} + \overline{BE} + \overline{EF}$.

Portanto,

$$\mathcal{A}_T = \frac{h}{2}\left(\overline{AB} + \overline{EF} + L_2 + L_2\right) = \frac{h}{2}(L_1 + L_2) .$$

Questão 5 ***20 pontos***

Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função decrescente e* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *um função crescente. Definimos a função* $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *da seguinte forma:*

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

isto é, h *é a função composta de uma função* f *decrescente com uma função* g *crescente. Podemos afirmar que* h *é uma função decrescente?*

Resolução

Como f é uma função decrescente, temos

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2),$$

e g é uma função crescente, temos

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad g(x_1) < g(x_2).$$

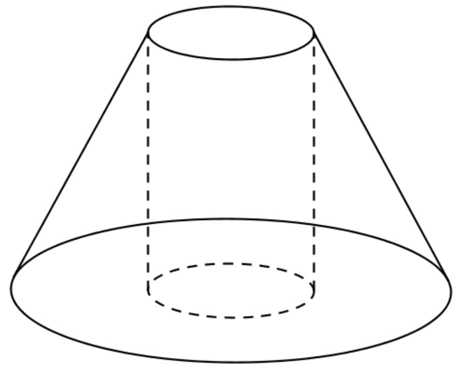
Desse modo, para $x_1 < x_2$, temos

$$h(x_1) = (f \circ g)(x_1) = f(g(x_1)) > h(x_2) = (f \circ g)(x_2) = f(g(x_2)).$$

Portanto, temos que a função $h = f \circ g$ é uma função decrescente.

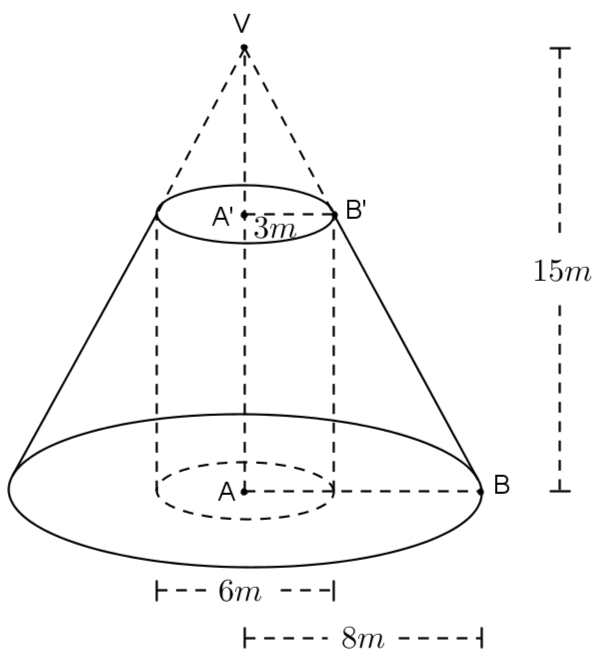
Questão 6 ***20 pontos***

Considere um cone circular reto de altura $15\,m$ *e raio da base* $8\,m$*. É feita no cone uma cavidade cilíndrica de diâmetro* $6\,m$*, com centro da cavidade coincidindo com o eixo do cone, formando um sólido, como ilustra a figura abaixo. Determine o volume do sólido.*



Resolução

Seja S o sólido obtido ao fazer a cavidade cilíndrica no cone e V_S o seu volume. Sendo C_1 o cone circular reto de altura $\overline{AV} = 15\,m$ e raio da base $\overline{AB} = 8\,m$, C_2 o cone circular reto de altura $\overline{A'V}$ e raio da base $\overline{A'B'} = 3\,m$ e C_3 o cilindro circular reto de altura $\overline{AA'}$ e raio da base $\overline{A'B'} = 3\,m$, o volume do sólido S é dado por $V_S = V_1 - V_2 - V_3$, onde V_1 é o volume de C_1, V_2 é o volume de C_2 e V_3 é o volume de C_3, como ilustra a figura abaixo.



Cálculo de V_1:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \times (\overline{AB})^2 \times \overline{AV} = 320 \times \pi\,.$$

Cálculo de V_2:

$$V_2 \;=\; \frac{1}{3}\pi \times (\,\overline{A'B'}\,)^2 \times \overline{A'V} \;=\; 3\pi \times \overline{A'V}\;.$$

Pela semelhança dos triângulos retângulos ABV e $A'B'V$, obtemos

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{A'V}} \;=\; \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}\;.$$

Assim

$$\overline{A'V} \;=\; \frac{45}{8} \qquad \text{e} \qquad V_2 \;=\; \frac{135}{8} \times \pi\;.$$

Cálculo de V_3:

$$V_3 \;=\; \pi \times (\,\overline{A'B'}\,)^2 \times \overline{AA'} \;=\; \pi \times (\,\overline{A'B'}\,)^2 \times (\,\overline{AV} \;-\; \overline{A'V}\,) \;=\; \frac{675}{8} \times \pi\;.$$

Portanto, o volume do sólido S é dado por:

$$V_S \;=\; V_1 \;-\; V_2 \;-\; V_3 \;=\; \frac{875}{4} \times \pi\;.$$