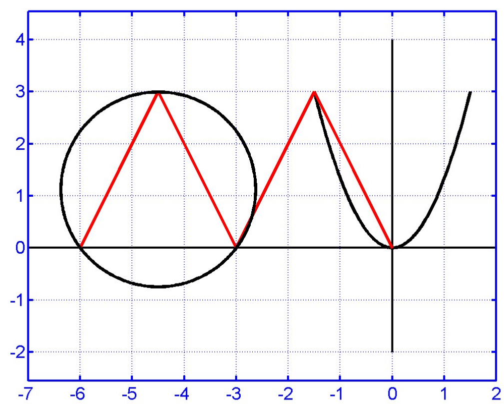


Gabarito da Prova da Primeira Fase – Nível Alfa

Questão 1 ***20 pontos***

(a) Escreva o número natural 2012 *como a soma de dois números naturais de modo que um deles seja igual a cinco vezes o outro mais dois.*

(b) Escreva o número natural 2013 *como a soma de três números ímpares consecutivos.*

Resolução

(a) Vamos denotar por m e n os dois números naturais que desejamos determinar, de modo que $m = 5n + 2$. Assim, temos as seguintes equações

$$m + n = 2012 \qquad \text{e} \qquad m = 5n + 2\,.$$

Substituindo a segunda equação na primeira equação, obtemos

$$5n + 2 + n = 2012 \iff 6n = 2010 \iff n = 335\,.$$

Portanto, os números naturais procurados são $n = 335$ e $m = 1677$.

(b) Vamos denotar por $2n + 1$, $2(n+1) + 1$ e por $2(n+2) + 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, três números ímpares consecutivos. Assim, temos a seguinte equação

$$2n + 1 + 2(n+1) + 1 + 2(n+2) + 1 = 2013 \iff 6n + 9 = 2013 \iff n = 334\,.$$

Assim, os três números ímpares consecutivos procurados são 669, 671 e 673.

Questão 2 ***20 pontos***

De quantas maneiras podemos escolher três números naturais distintos de 1 a 30 de modo que a soma deles seja um número par?

Resolução

Primeiramente observamos que entre os números naturais de 1 a 30 temos quinze números pares e quinze número ímpares. Além disso, a soma de três números naturais resulta em um número par nas seguintes situações:

(a) Se os três números naturais são pares. De fato,

$$2k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 2(k_1 + k_2 + k_3),$$

onde k_1, k_2, k_3 são números naturais.

Neste caso temos que escolher três números pares distintos num conjunto de quinze números. Desse modo, a quantidade de maneiras de escolhas é dada por:

$$C_3^{15} = \frac{15!}{12! \times 3!} = \frac{13 \times 14 \times 15}{2 \times 3} = 455 .$$

(b) Se dois deles são ímpares e o outro é par. De fato,

$$(2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + 2k_3 = 2(k_1 + k_2 + k_3 + 1),$$

onde k_1, k_2, k_3 são números naturais.

Neste caso temos que escolher dois números ímpares distintos num conjunto de quinze números e um número par num conjunto de quinze números. Desse modo, a quantidade de maneiras de escolhas é dada por:

$$C_2^{15} \times C_1^{15} = \frac{15!}{13! \times 2!} \times 15 = \frac{14 \times 15}{2} \times 15 = 1575 .$$

Portanto, temos 2030 maneiras de escolher três números naturais distintos de 1 a 30 de modo que a soma deles seja um número par.

Questão 3 **20 pontos**

O custo total para a produção de um determinado produto é a soma de um valor fixo $R\$\,12.240,00$ *com o custo de produção unitário de* $R\$\,30,00$. *Considere que o preço unitário de venda desse produto é de* $R\$\,66,00$.

(a) *Determine a quantidade de produtos vendidos a partir da qual a empresa começa apresentar lucro. Faça uma representação gráfica da situação descrita no problema.*

(b) *Determine uma expressão para o lucro da empresa em função da quantidade de produtos vendidos.*

Resolução

Vamos admitir que toda produção será vendida, que é uma hipótese que simplifica a resolução do problema. Denotamos por C o custo para a produção de n produtos e por R a receita obtida pela venda desses n produtos, que são dados por:

$$C(n) = 12.240 + 30n \qquad \text{e} \qquad R(n) = 66n\,.$$

O lucro da empresa é dado por $L = R - C$. Assim, temos

$$L(n) = R(n) - C(n) = 66n - (\,12.240 + 30n\,) = 36n - 12.240\,.$$

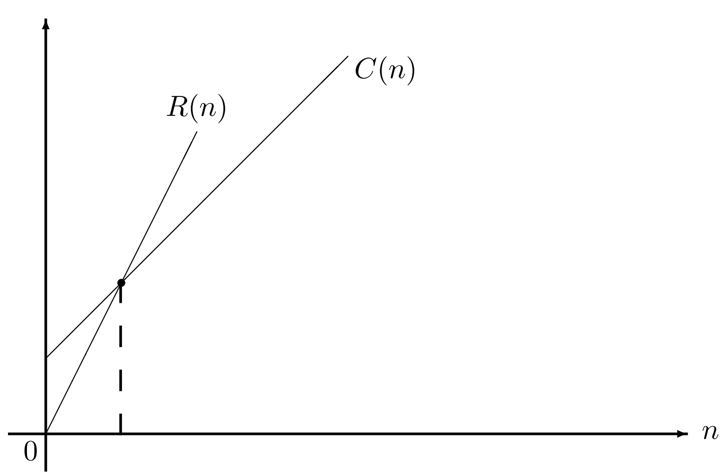
Portanto, o lucro da empresa, em função da quantidade de produtos vendidos, é expresso por:

$$L(n) = 36n - 12.240\,.$$

Vamos encontrar a quantidade de produtos que devem ser vendidos para que a receita seja igual ao custo de produção, como ilustra a figura abaixo. Assim, temos que encontrar a solução da equação

$$R(n) = C(n) \iff 66n = 12.240 + 30n \iff 36n = 12.240 \iff n = 340\,.$$

Desse modo, somente após a venda de 340 produtos a empresa começa apresentar lucro.



Questão 4 ***20 pontos***

Uma latinha de refrigerante que é aproximadamente um cilindro circular reto com base de $6\,cm$ de diâmetro, contém $360\,ml$. Determine aproximadamente a altura da latinha, em centímetros. Caso seja necessário utilizar a seguinte aproximação $\pi \approx 3,14$.

Resolução

Sabemos que um litro corresponde a $1000\,cm^3$ ($1\,dm^3$). Assim, $360\,ml$ corresponde a $360\,cm^3$. Denotando por h a altura da latinha de refrigerante e por V seu volume, temos

$$V = \pi r^2 h \,,$$

onde $r = 3\,cm$ é o raio da base do cilindro circular reto.

Assim, desejamos determinar aproximadamente a altura da latinha para que possa conter $360\,ml$ de refrigerante, isto é,

$$V = \pi r^2 h = 360\,cm^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad h = \frac{360}{9\pi} = \frac{40}{\pi} \approx \frac{40}{3,14} \approx 12,74\,cm\,.$$

Questão 5 ***20 pontos***

Numa liquidação, uma camiseta teve um desconto de 20% *e passou a custar* $R\$\,180,00$. *Determine o preço dessa camiseta antes de sofrer o desconto.*

Resolução

Vamos denotar por P_a o preço em reais da camiseta antes de sofrer o desconto de 20%. Assim, o preço da camiseta com desconto, que vamos denotar por P_c, é calculado da forma:

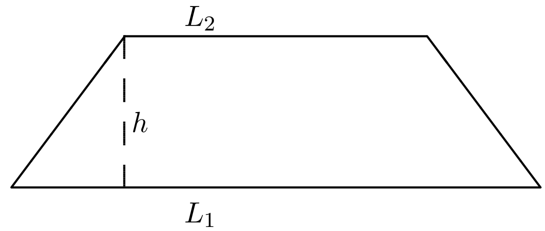
$$P_c \;=\; 0,8 \times P_a \;=\; 180\,reais\;.$$

Portanto, o preço da camiseta antes do desconto é dado por:

$$P_a \;=\; \frac{180}{0,8} \;=\; \frac{180}{8 \times 10^{-1}} \;=\; \frac{1800}{8} \;=\; 225\,reais\;.$$

Questão 6 ***20 pontos***

Considere um ***trapézio isosceles*** *onde* L_1 *é o comprimento da base maior,* L_2 *é o comprimento da base menor e* h *é a altura, como ilustra a figura abaixo.*



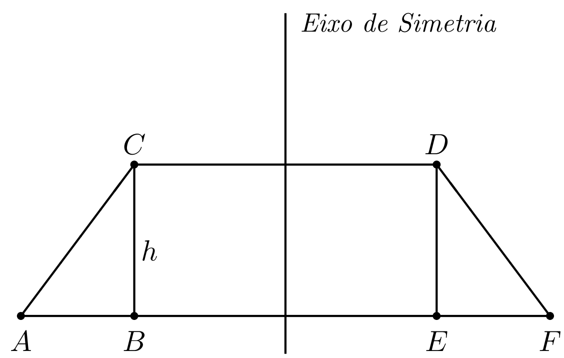
(a) Mostre que a área do trapézio isosceles é dada por:

$$\mathcal{A}_T = \frac{h}{2}(L_1 + L_2),$$

(b) Determine o perímetro do trapézio isosceles, em função das suas dimensões.

Resolução

(a) Um trapézio isósceles é aquele que possui os lados não paralelos com a mesma medida, isto é, $\overline{AC} = \overline{DF}$, como ilustra a figura abaixo. Assim, possui um eixo de simetria.



Podemos observar que a área do trapézio é igual a área do triângulo ABC mais a área do triângulo DEF mais a área do retângulo $BCDE$.

Como o trapézio é isósceles, os triângulos ABC e DEF possuem a mesma área, uma vez que

$$\overline{AB} = \overline{EF} = \frac{L_1 - L_2}{2}.$$

Desse modo, podemos escrever a área do trapézio da seguinte forma:

$$\mathcal{A}_T = 2 \times \frac{h \times \overline{AB}}{2} + h \times L_2 = h \times \frac{L_1 - L_2}{2} + h \times L_2 = \frac{h}{2}(L_1 + L_2).$$

(b) Podemos escrever o perímetro do trapézio isósceles da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_T \;=\; L_1 \;+\; L_2 \;+\; \overline{AC} \;+\; \overline{DE} \;=\; L_1 \;+\; L_2 \;+\; 2 \times \overline{AC}\;.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos

$$(\,\overline{AC}\,)^2 \;=\; h^2 \;+\; \frac{(L_1 \;-\; L_2)^2}{4}$$

Assim, tem–se

$$\overline{AC} \;=\; \sqrt{h^2 \;+\; \frac{(L_1 \;-\; L_2)^2}{4}} \;\;=\;\; \frac{\sqrt{4 \times h^2 \;+\; (L_1 \;-\; L_2)^2}}{2}$$

Portanto,

$$\mathcal{P}_T \;=\; L_1 \;+\; L_2 \;+\; \sqrt{4 \times h^2 \;+\; (L_1 \;-\; L_2)^2}\;.$$