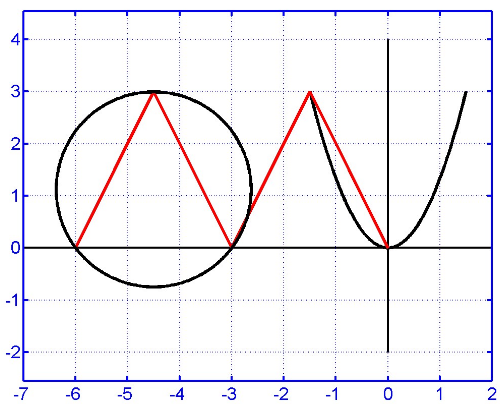


Gabarito da Prova da Primeira Fase – Nível Beta

Questão 1 ***20 pontos***

Determine as soluções do sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

e faça uma interpretação geométrica.

Resolução

Da segunda equação temos $y = 2 - 2x$, que substituindo na primeira equação, obtemos

$$x^2 + (2-2x)^2 = 1 \iff 5x^2 - 8x + 3 = 0 \iff x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{3}{5}\,.$$

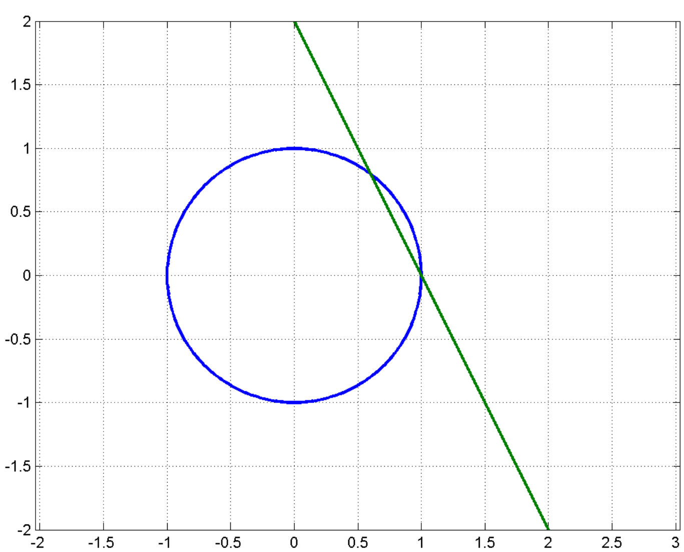
Substituindo x_1 e x_2 na equação $y = 2 - 2x$, obtemos as seguintes soluções para o sistema de equações algébricas

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad y_1 = 0\,.$$
$$x_2 = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{4}{5}\,.$$

Desse modo, os pontos P_1 e P_2, do plano cartesiano, dados por:

$$P_1 = (1,0) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\,,$$

representam os pontos de intersecções do gráfico da circunferência de centro $C = (0,0)$ e raio $r = 1$, dada pela primeira equação, com o gráfico da reta dada pela segunda equação, como ilustra a figura abaixo.



Questão 2 ***20 pontos***

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz real de ordem n. Dizemos que A é uma ***matriz anti–simétrica*** *se $A^t = -A$, onde A^t é a matriz transposta da matriz A, isto é,*

$$a_{ji} = -a_{ij} \qquad \text{para} \qquad i,\, j = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots,\, n\,.$$

(a) Exiba uma matriz anti–simétrica de ordem 3.

(b) Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz anti–simétrica de ordem n. Mostre que os elementos da diagonal principal de A são todos nulos, isto é, $a_{ii} = 0$ para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.

(c) Sejam $A = [a_{ij}]$ uma matriz anti–simétrica de ordem n, X e Y matrizes colunas de ordem $n \times 1$. Mostre que

$$Y^t A X = -X^t A Y\,.$$

Resolução

(a) A matriz dada abaixo é um exemplo de matriz anti–simétrica de ordem 3.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Como $A = [a_{ij}]$ é uma matriz anti–simétrica de ordem n, tem–se que $a_{ji} = -a_{ij}$ para $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$. Desse modo, para $j = i$, temos que

$$a_{ii} = -a_{ii} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_{ii} = 0\,,$$

para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, o que completa a prova.

(c) Como $Y^t A X$ é uma matriz de ordem 1, tem–se $(\, Y^t A X\,)^t = Y^t A X$. Desse modo, utilizando as propriedades de transposta de matrizes e o fato que A é uma matriz anti–simétrica, obtemos

$$Y^t A X = (\, Y^t A X\,)^t = X^t A^t (\, Y^t\,)^t = X^t(-A)Y = -X^t A Y\,.$$

Questão 3 *20 pontos*

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ \quad - y + z = 2 \\ x + 2y - mz = 3 \end{cases}$$

Determine os valores do parâmetro m para os quais

(a) *o sistema linear admita solução única.*

(b) *o sistema linear admita infinitas soluções.*

(c) *o sistema linear não admita solução.*

Resolução

Vamos utilizar o processo de escalonamento para analisar o tipo do sistema linear em função do parâmetro m, através de um sistema linear triangular superior linha equivalente ao sistema linear original. Primeiramente vamos permutar a primeira equação e a terceira equação.

$$\begin{cases} x + 2y - mz = 3 \\ \quad - y + z = 2 \\ mx + y - z = 1 \end{cases}$$

Em seguida multiplicando a primeira equação por m e subtraindo da terceira equação, obtemos

$$\begin{cases} x + 2y - mz = 3 \\ \quad - y + z = 2 \\ (1-2m)y + (m^2-1)z = 1-3m \end{cases}$$

Finalmente, multiplicando a segunda equação por $1-2m$ e somando a terceira equação, obtemos

$$\begin{cases} x + 2y - mz = 3 \\ \quad - y + z = 2 \\ (m^2-2m)z = 3-7m \end{cases}$$

que é um sistema linear triangular superior linha equivalente ao sistema linear original, cuja matriz é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -m \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m^2-2m \end{bmatrix}.$$

(a) Para que o sistema linear admita solução única, precisamos que $\det(A) = -(m^2-2m) \neq 0$. Assim, devemos ter $m \neq 0$ e $m \neq 2$.

(b) Para que o sistema linear admita infinitas solução, precisamos ter $(m^2-2m) = 0$ e $3-7m = 0$. Note que não existem valores para o parâmetro m que satisfazem as duas condições simultaneamente. Assim, não temos uma situação que o sistema linear admita infinitas soluções.

(c) Para que o sistema linear não admita solução, precisamos ter $(m^2-2m) = 0$ e $3-7m \neq 0$. Assim, devemos ter $m = 0$ ou $m = 2$.

Questão 4 ***20 pontos***

Em um supermercado estão latas de creme de chocolate na forma de cilindros circulares retos de dois tamanhos. A altura da primeira lata é igual a duas vezes e meia a altura da segunda lata, e o diâmetro da segunda lata é igual a uma vez e meia o diâmetro da primeira lata.

(a) Considerando que o preço das duas lata são iguais, qual delas é mais vantajoso comprar?

(b) Considerando que o preço da segunda lata é 80 % do preço da primeira lata, qual delas é mais vantajoso comprar?

(c) Considerando que o preço da segunda lata é 90 % do preço da primeira lata, qual delas é mais vantajoso comprar?

Resolução

Vamos indicar por L_1 e L_2 as alturas da primeira lata e da segunda lata, respectivamente. Vamos indicar por R_1 e R_2 os raios das bases da primeira lata e da segunda lata, respectivamente. Assim, temos

$$L_1 = \frac{5}{2} L_2 \qquad \text{e} \qquad R_2 = \frac{3}{2} R_1 \,.$$

Indicando por V_1 o volume da primeira lata e por V_2 o volume da segunda lata, tem–se:

$$V_1 = \pi \times L_1 \times R_1^2 = \frac{20}{18} \times \pi \times L_2 \times R_2^2 = \frac{10}{9} V_2 \,.$$

Desse modo, o volume da primeira lata é maior que o volume da segunda lata.

(a) Considerando que o preço das duas lata são iguais, é mais vantajoso comprar a primeira lata.

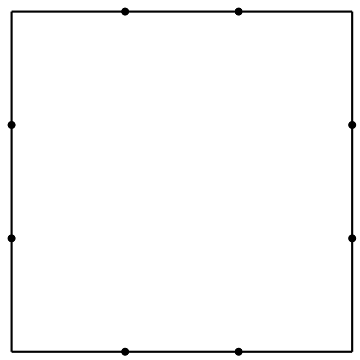
(b) Considerando que o preço da segunda lata é 80 % do preço da primeira lata, é mais vantajoso comprar a segunda lata, uma vez que o volume da segunda lata é igual a 90 % do volume da primeira lata, isto é,

$$V_1 = \frac{10}{9} V_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad V_2 = \frac{9}{10} V_1 = 0,9 \times V_1 \,.$$

(c) Considerando que o preço da segunda lata é 90 % do preço da primeira lata, não fez diferença comprar a primeira ou a segunda lata, uma vez que o volume da segunda lata é igual a 90 % do volume da primeira lata.

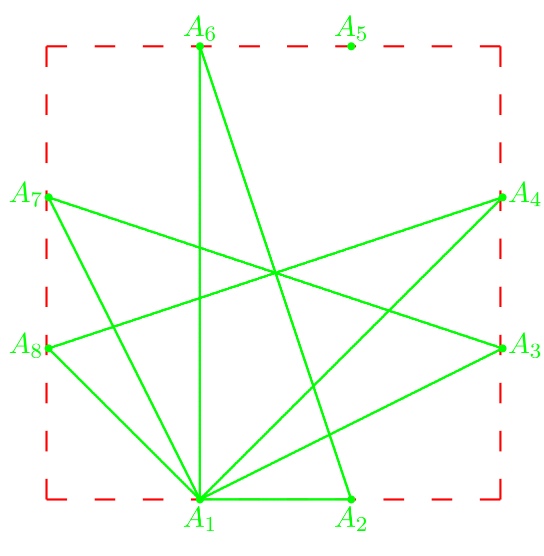
Questão 5 ***20 pontos***

Na figura abaixo, temos um quadrado cujos lados foram divididos em três partes iguais, destacadas pelos oito pontos. Determine quantos triângulos retângulos podem ser traçados com os vértices nesses pontos.



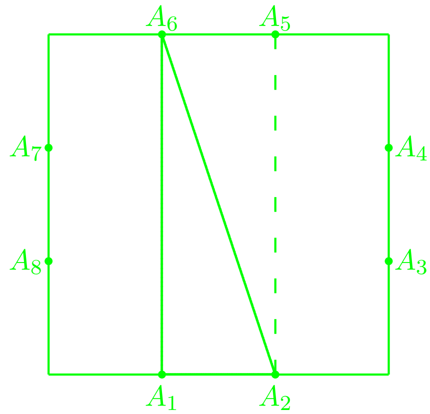
Resolução

Vamos denotar os oito pontos, utilizados para dividir os lados do quadrado, por $A_1, A_2, \cdots, A_8$, como ilustra a figura abaixo. Primeiramente, vamos encontrar o número de triângulos retângulos, que podemos construir de acordo com a regra dada, com o ângulo reto no ponto A_1. A figura abaixo mostra os três triângulos retângulos que podemos construir com o vértice com o ângulo reto no ponto A_1: $A_1A_2A_6$; $A_1A_3A_7$ e $A_1A_4A_8$. De modo análogo, concluímos que existem exatamente três triângulos com ângulo reto em cada um dos pontos A_i para $i = 1, 2, \cdots, 8$. Portanto, o número de triângulos retângulos com vértices nesses pontos é $8 \times 3 = 24$.

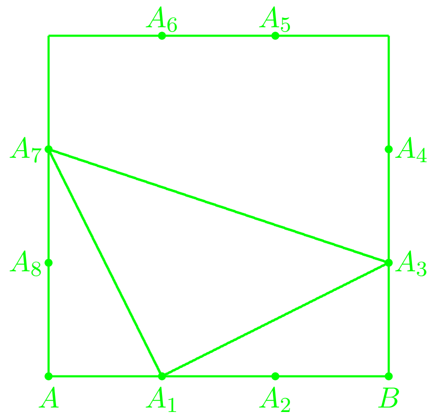


Devemos justificar a afirmativa de que esses triângulos são de fato triângulos retângulos.

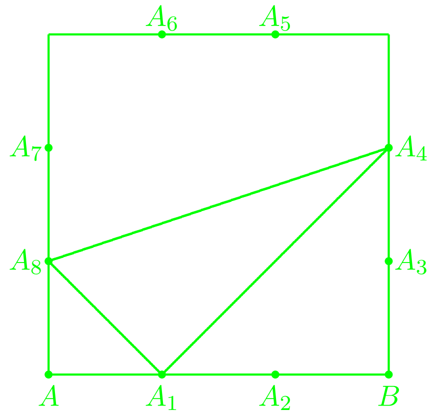
Fica claro que o triângulo $A_1A_2A_6$ tem o ângulo reto no vértice A_1, uma vez que sua hipotenusa é a diagonal do retângulo $A_1A_2A_5A_6$ e seus catetos são lados desse mesmo retângulo, como mostra a figura abaixo.



Na figura abaixo, notamos que os triângulos retângulos A_1AA_7 e A_1BA_3 são congruentes, logo seus ângulos com vértice no ponto A_1 somam 90^o. Assim, o ângulo do triângulo $A_1A_3A_7$ no vértice A_1 é também de 90^o.

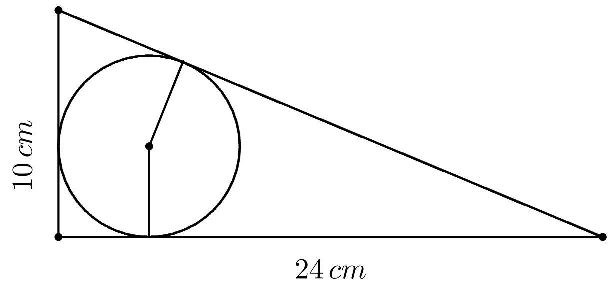


Na figura abaixo, notamos que os triângulos retângulos A_1AA_8 e A_1BA_4 são isósceles, com ângulos retos em A e B, respectivamente. Logo seus ângulos com vértice no ponto A_1 somam 90^o. Assim, o ângulo do triângulo $A_1A_4A_8$ no vértice A_1 é também de 90^o.



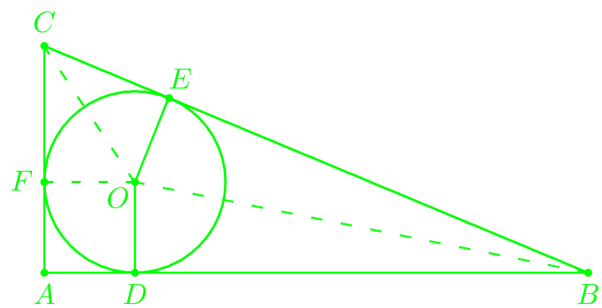
Questão 6 ***20 pontos***

Na figura abaixo, determine a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo retângulo, cujos catetos medem $24\,cm$ *e* $10\,cm$.



Resolução

Seja r o raio da circunferência inscrita no triângulo retângulo ABC, como ilustra a figura abaixo.



Como os pontos D, E e F são pontos de tangência a circunferência de retas traçadas de pontos externos a circunferência, temos que os ângulos $C\widehat{F}O$, $C\widehat{E}O$ e $B\widehat{D}O$ são ângulos retos. Como os triângulos retângulos CFO e CEO são congruentes, uma vez tem ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, temos $\overline{EC} = \overline{FC}$. De modo análogo, os triângulos retângulos BDO e BEO são congruentes, uma vez que têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, temos $\overline{BE} = \overline{BD}$. Desse modo, obtemos

$$\overline{BE} = \overline{DB} = 24 - r \qquad \text{e} \qquad \overline{EC} = \overline{FC} = 10 - r\,.$$

As relações acima fornecem

$$\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EC} = 24 - r + 10 - r = 34 - 2r\,.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, obtemos

$$\begin{aligned}
(\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 &= (\overline{BC})^2 \\
24^2 + 10^2 &= (\,34 - 2r\,)^2 \\
676 &= 4r^2 - 136r + 1156 \\
4r^2 - 136r + 480 &= 0 \\
r^2 - 34r + 120 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Podemos verificar facilmente que a equação quadrática obtida acima admite as seguintes soluções reais $r = 4$ e $r = 30$. Como o raio r deve ser menor do que os catetos, concluímos que $r = 4\,cm$.