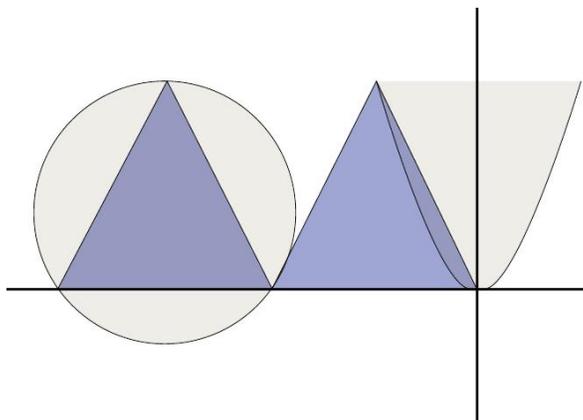


CADERNO DE QUESTÕES

Prova da Terceira Fase - Nível Beta

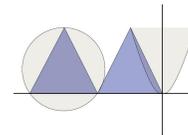
26 de agosto de 2018

Duração: 4 horas



Instruções

1. É proibido destacar as folhas do **CADERNO DE RESPOSTAS**.
2. Confira se o número de inscrição na sua carteira corresponde ao número no **CADERNO DE RESPOSTAS**.
3. A prova tem duração de 4 horas. Leia todas as questões com muita atenção. A prova pode ser resolvida à lápis ou à caneta. Justifique todas as suas respostas, apresente o raciocínio utilizado em cada passo da sua solução.
4. É permitido apenas lápis, borracha, caneta, régua e identidade em cima da carteira. As mochilas deverão ser deixadas na frente da sala, junto com os fiscais. **Desligue o celular**.
5. Qualquer dúvida ou necessidade solicite a ajuda do fiscal.
6. É proibida a comunicação entre os candidatos e a utilização de qualquer material de consulta e de aparelhos eletrônicos e de telecomunicação.
7. Ao final da prova é obrigatória a devolução do **CADERNO DE RESPOSTAS**. É permitido levar para casa o **CADERNO DE QUESTÕES**.



Questão 1 (20 pontos) Uma certa padaria vende três tipos de bebidas em preços promocionais: café, chocolate quente e cappuccino. Por estarem em promoção, não é permitido a um cliente comprar mais de uma unidade de cada tipo de bebida. Assim, um cliente poderia comprar, por exemplo, um café e um chocolate quente mas não poderia comprar dois cafés.

Num determinado dia a padaria vendeu um total de 345 bebidas nesta promoção onde:

- o número de pessoas que não compraram chocolate quente é igual ao número de pessoas que não compraram café;
- exatamente 100 cafés foram vendidos.

Determine a quantidade de cappuccinos e a quantidade de chocolates quentes vendidos.

Questão 2 (20 pontos) Um trapézio é dito *estável* se os ângulos internos da base maior são ambos menores ou iguais a 90° . Por exemplo, os trapézios exibidos na figura 1 são estáveis enquanto o trapézio da segunda figura não é estável.

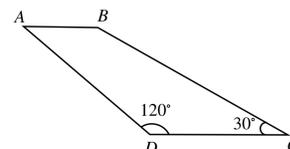
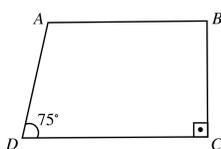
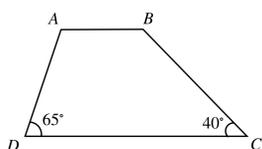


Figura 1: Exemplos de trapézios estáveis.

Figura 2: Exemplo de trapézio não estável.

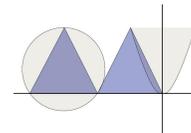
Em um certo trapézio estável $ABCD$ sabe-se que a diferença do comprimento de lados opostos é constante, ou seja,

$$|CD - AB| = |BC - AD|.$$

Prove que $ABCD$ é um retângulo.

Questão 3 (20 pontos) Seja p um número real fixado, determine todas as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem simultaneamente as seguintes propriedades

- $f(p) = g(p) = 0$;
- $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq p$;
- $f(x) + g(x)$ é um polinômio de grau 1;
- $f(x) \cdot g(x)$ é um polinômio de grau 2.



Questão 4 (20 pontos) Seja ABC um triângulo com lados de comprimentos $AC = 5$ cm, $AB = 6$ cm e $BC = 7$ cm. Determine o raio da circunferência circunscrita a ABC .

Questão 5 (20 pontos) Uma matriz 2×2 com entradas inteiras é uma tabela $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ composta por duas linhas e duas colunas de números inteiros $a_{ij}, i, j \in \{1, 2\}$. A *posição* do elemento a_{ij} da matriz A é, por definição, o par (i, j) associado a tal elemento. Chamamos de *determinante de A* o número

$$\det A := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Dois matrizes 2×2 de entradas inteiras M e N são ditas *amigas entre si* quando pode-se escolher duas entradas a e b de M e duas entradas c e d de N de forma que:

- i) c ocupa em N a mesma posição que a ocupa em M ;
- ii) d ocupa em N a mesma posição que b ocupa em M ;
- iii) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é um múltiplo de 3.

Por exemplo, as matrizes $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ são amigas entre si pois ao tomarmos $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ e $d = 5$ temos

- $c = 4$ ocupa em N a posição $(1, 1)$ e $a = 1$ ocupa em M a posição $(1, 1)$;
- $d = 5$ ocupa em N a posição $(1, 2)$ e $b = 2$ ocupa em M a posição $(1, 2)$;
- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -3$ que é múltiplo de 3.

- a) Seja $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ uma matriz com entradas inteiras. Prove que M e $M^T := \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ são amigas entre si.
- b) Seja S um conjunto formado por 5 matrizes de entradas inteiras. Prove que existem pelo menos duas matrizes $M, N \in S$ que são amigas entre si.