Gabarito Terceira Fase 2018 - Nível Beta

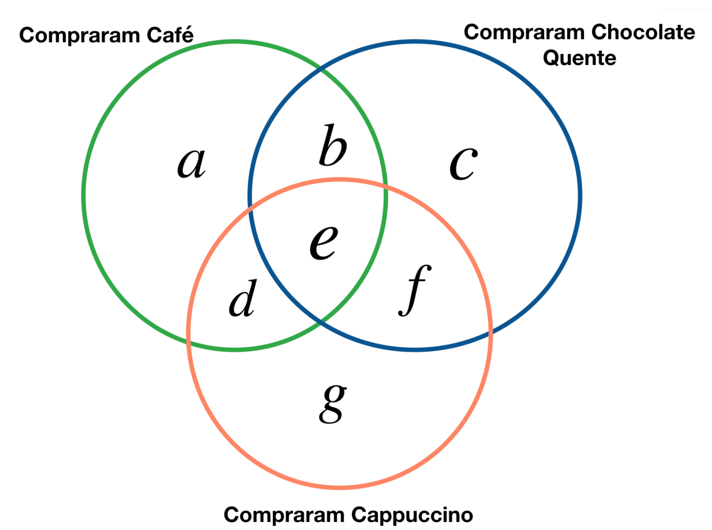
Questão 1 Uma certa padaria vende três tipos de bebidas em preços promocionais: café, chocolate quente e cappuccino. Por estarem em promoção, não é permitido a um cliente comprar mais de uma unidade de cada tipo de bebida. Assim, um cliente poderia comprar, por exemplo, um café e um chocolate quente mas não poderia comprar dois cafés.

Num determinado dia a padaria vendeu um total de 345 bebidas nesta promoção onde:

- o número de pessoas que não compraram chocolate quente é igual ao número de pessoas que não compraram café;
- exatamente 100 cafés foram vendidos.

Determine a quantidade de cappuccinos e a quantidade de chocolates quentes vendidos.

Solução: Primeiramente consideramos o diagrama de Vein do número de clientes que compraram cada produto.



Observe que, neste diagrama:

- o número de clientes que não compraram chocolate quente é $a + d + g$;
- o número de clientes que não compraram café é $c + f + g$.

Assim a primeira informação nos diz que:

$$a + d + g = c + f + g$$

$$\Rightarrow a + d = c + f. \tag{1}$$

Uma vez que cada cliente que comprou café comprou exatamente 1 café, a quantidade de pessoas que compraram café é $a + b + e + d$. Assim a segunda informação nos diz que:

$$a + b + d + e = 100. \tag{2}$$

A quantidade de chocolates quentes vendidos é igual a quantidade de pessoas que compraram chocolate quente, que é: $b + e + c + f$. Agora por (1) e (2) temos

$$b + e + c + f = b + e + a + d = 100.$$

Assim, no total foram vendidos 100 chocolates quentes. Consequentemente, como o total de bebidas vendidas neste dia foi 145, a quantidade de cappuccinos vendidos foi

$$300 - (\text{qtd. de cafés vendidos}) - (\text{qtd. de chocolates quentes vendidos}) = 300 - 100 - 100 = 145.$$

Questão 2 Um trapézio é dito *estável* se os ângulos internos da base maior são ambos menores ou iguais a 90°. Por exemplo, os trapézios exibidos na figura 1 são estáveis enquanto o trapézio da segunda figura não é estável.

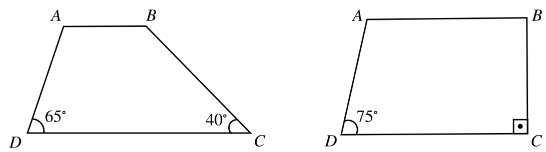


Figura 1: Exemplos de trapézios estáveis.

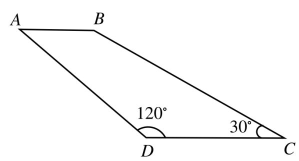


Figura 2: Exemplo de trapézio não estável.

Em um certo trapézio estável $ABCD$ sabe-se que a diferença do comprimento de lados oposto é constante, ou seja,

$$|CD - AB| = |BC - AD|.$$

Prove que $ABCD$ é um retângulo.

Solução 1:

Primeiramente observemos que todo retângulo $ABCD$ é um trapézio estável pois, neste caso, temos $AB = CD$ e $BC = DA$ o que implica:

$$|CD - AB| = 0 = |BC - AD|.$$

Suponhamos agora que $ABCD$ não seja um retângulo e consideremos, sem perda de generalidade, que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases do trapézio $ABCD$. Ainda sem perda de generalidade podemos assumir que $\overline{AB}$ é a base menor e $\overline{CD}$ a base maior. Como estamos assumindo que $ABCD$ é estável e não é um retângulo então os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ não podem ser paralelos pois se fossem teríamos

$$\angle ADC + \angle BCD = 180°$$

o que implicaria que os ângulos internos da base maior deveriam ser ambos retos, contradizendo o fato que o trapézio $ABCD$ não é um retêngulo. Consideremos então E o ponto sobre o lado $\overline{CD}$ de forma que $\overline{BE}$ é paralelo ao lado $\overline{AD}$. Como $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ não podem ser paralelos temos $E \neq C$. Assim, temos o seguinte desenho:

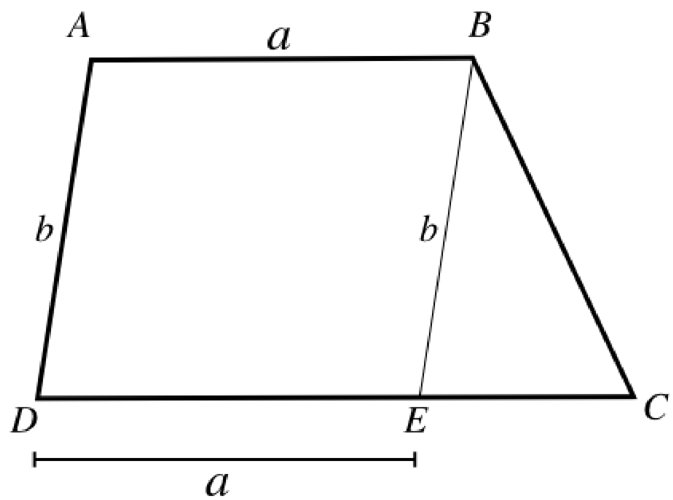


Figura 3: A letra a apenas indica que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ possuem o mesmo comprimento e a letra b indica que $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ possuem o mesmo comprimento.

Como $\overline{BE}$ é paralelo ao lado $\overline{AD}$ temos $BE = AD$. Assim,

$$|CD - AB| = |BC - AD| \Rightarrow |AB + CE - AB| = |BC - BE|$$

$$\Rightarrow CE = |BC - BE|.$$

Logo

$$CE + BE = BC \quad \text{ou} \quad CE + BC = BE. \tag{3}$$

Como BCE é um triângulo sabemos que a soma de quaisquer dois de seus lados sempre deve ser maior que o terceiro lado. Assim, nenhuma das igualdades em (3) pode ocorrer o que nos dá uma contradição.

Portanto, de fato, se $ABCD$ for um trapézio estável então $ABCD$ deve ser um retângulo como queríamos demonstrar. $\square$

Solução 2:

Consideremos um trapézio $ABCD$ satisfazendo a condição do enunciado e suponhamos sem perda de generalidade que AB e CD sejam as bases de $ABCD$ com $CD \geq AB$ e $BC \geq AD$. Denote por a, b, c e d os comprimentos dos lados AB, BC, CD e DA respetivamente com

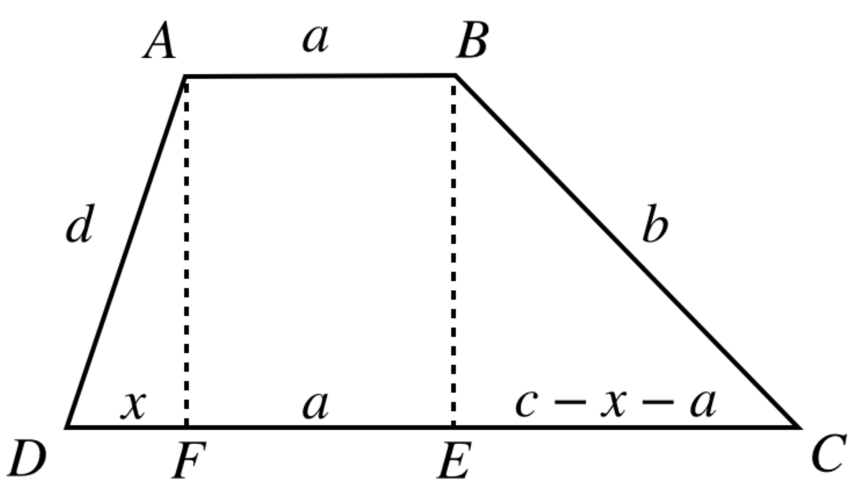
$$c \geq a \quad \text{e} \quad b \geq d.$$

Considere E e F os pés das alturas traçadas a partir de B e de A. Temos três possibilidades a estudar:

- Caso 1: E e F estão ambos no segmento CD;
- Caso 2: um dos pontos E ou F está no segmento CD e o outro está fora deste segmento;
- Caso 3: ambos E e F estão fora do segmento CD.

Nos casos 2 e 3 um (ou ambos) dos ângulos internos é superior a 90° o que contradiz a hipótese de o trapézio ser estável. Assim só podemos estar no Caso 1.

Neste caso, suponhamos que $F \neq D$ e que $E \neq C$, assim temos a seguinte figura



Seja h a altura do trapézio $ABCD$ e $x = DF$, aplicando o teorema de pitágoras nos triângulos ADF e BEC temos :

$$d^2 = x^2 + h^2$$

$$b^2 = (c - x - a)^2 + h^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - 2c(x + a) + x^2 + 2ax + a^2 + h^2$$

Assim,

$$b^2 - d^2 = c^2 - 2cx - 2ca + 2ax + a^2 \Rightarrow (b - d)(b + d) = (c - a)(c - 2x - a).$$

Agora, pela hipótese do enunciado temos $b - d = c - a$, logo ou $b = d$ e $c = a$, o que concluiria o problema, ou

$$b + d = c - a - 2x \Rightarrow b + d = b - d - 2x \Rightarrow d = -x$$

caindo em contradição com o fato que $d > 0$ e $x > 0$. Logo neste caso só podemos ter $b = d$ e $c = a$ como queríamos.

Vamos agora estudar o caso em que $F = D$ ou $E = C$. Suponhamos que $F = D$ e $E \neq C$. Neste caso temos $d = h$, $x = 0$ e

$$b^2 = (c - a)^2 + h^2 \Rightarrow b^2 = (c - a)^2 + d^2 \Rightarrow (b - d)(b + d) = (c - a)^2.$$

Assim, ou $b = d$ e $c = a$ ou

$$b + d = c - a \Rightarrow b + d = b - d \Rightarrow d = 0,$$

caindo em contradição. Logo só podemos ter $b = d$ e $c = a$.

Portanto em todas as possibilidades temos

$$CD - AB = BC - AD = 0 \Rightarrow AB = CD.$$

Consequentemente temos $EF = a = CD$, o que implica que

$$\angle ADC = \angle AFC = 90°, \quad \text{e} \quad \angle BCD = \angle BED = 90°, \quad AB \parallel CD.$$

Logo $ABCD$ é um retângulo como queríamos demonstrar. $\square$

Questão 3 Seja p um número real fixado, determine todas as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes propriedades

- $f(p) = g(p) = 0$;
- $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq p$;
- $f(x) + g(x)$ é um polinômio de grau 1;
- $f(x) \cdot g(x)$ é um polinômio de grau 2.

Solução: Primeiramente observemos que como, pelo quarto item, $f(x)g(x)$ é um polinômio de grau 2 então $f(x)g(x)$ possui duas raízes. Como $f(p) = 0$ então p é uma das raízes de $f(x)g(x)$. Como o grau é 2 e $p \in \mathbb{R}$ então a segunda raíz também é real. Seja $q \in \mathbb{R}$ a segunda raiz então $f(q)g(q) = 0$. Isto implica $f(q) = 0$ ou $g(q) = 0$. Pela segunda condição do enunciado, $f(q) = 0$ implicaria $q = p$ e $g(q) = 0$ também implicaria $q = p$, ou seja, de qualquer forma $q = p$.

Assim, p é a única raíz de $f(x)g(x)$ o que implica que $f(x)g(x)$ é da forma:

$$f(x)g(x) = a \cdot (x-p)^2, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{4}$$

Agora, como $f(p) = g(p) = 0$ então p é raiz de $f(x) + g(x)$. Como $f(x) + g(x)$ é, pelo terceiro item, um polinômio de grau 1 então

$$f(x) + g(x) = b \cdot (x - p), \quad \text{para algum} \quad b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{5}$$

Por (5) temos $g(x) = b \cdot (x-p) - f(x)$ e substituindo em (4) temos:

$$\begin{aligned} a \cdot (x-p)^2 =& f(x)g(x) = f(x) \cdot (b \cdot (x-p) - f(x)) \\ =& -f^2(x) + b \cdot (x-p) \cdot f(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^2(x) - b \cdot (x-p) \cdot f(x) - a \cdot (x-p)^2 = 0. \tag{6}$$

Resolvendo a equação (6) com na variável $f(x)$ temos:

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{b\cdot(x-p) \pm \sqrt{b^2\cdot(x-p)^2 + 4a\cdot(x-p)^2}}{2} \\ =& \frac{b\cdot(x-p) \pm |x-p|\sqrt{b^2+4a}}{2} \\ =& \frac{(x-p)(b\pm\sqrt{b^2+4a})}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}$ temos:

$$f(x) = \frac{(x-p)(b\pm\sqrt{b^2+4a})}{2}. \tag{7}$$

Considere $\alpha := \frac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2}$ e $\beta := \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$. Pela equação (7) existe um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ de forma que:

$$f(x) = \alpha\cdot(x-p), \quad \text{quando} \quad x \in A$$

$$f(x) = \beta\cdot(x-p), \quad \text{quando} \quad x \in \mathbb{R}\setminus A.$$

Substituindo em (4) temos:

- se $x \in A$

$$g(x) = b\cdot(x-p) - \alpha\cdot(x-p) = (x-p)\cdot\left(b - \frac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2}\right) = \beta\cdot(x-p)$$

- se $x \in \mathbb{R}\setminus A$ então:

$$g(x) = b\cdot(x-p) - \beta\cdot(x-p) = (x-p)\left(b - \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}\right) = \alpha\cdot(x-p).$$

Observe que a única relação entre α e β é que ambas constantes são raízes da equação $x^2 - b\cdot x - a = 0$ para certas constantes reais a e b. Em particular $\alpha+\beta = b \neq 0$ e $\alpha\cdot\beta = -a \neq 0$. Ou seja, α e β podem ser quaisquer constantes não nulas que satisfaçam $\beta \neq -\alpha$.

Logo, qualquer par de funções satisfazendo as condições do enunciado devem satisfazer: para um certo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tem-se

$$f(x) = \alpha \cdot (x - p), \quad \text{quando} \quad x \in A;$$

$$f(x) = \beta \cdot (x - p), \quad \text{quando} \quad x \in \mathbb{R} \setminus A,$$

e

$$g(x) = \beta \cdot (x - p), \quad \text{quando} \quad x \in A;$$

$$g(x) = \alpha \cdot (x - p), \quad \text{quando} \quad x \in \mathbb{R} \setminus A,$$

onde α e β são constantes reais satisfazendo $\beta \neq -\alpha$.

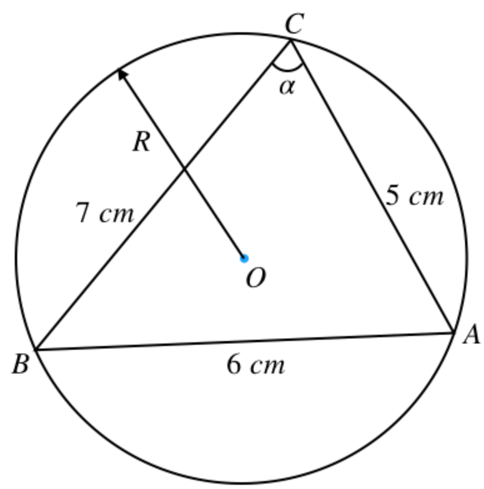
É fácil verificar, substituindo nas condições do enunciado, que para qualquer $A \subset \mathbb{R}$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, as funções f e g definidas acima satisfazem as condições do enunciado. Portanto estas são todas as funções satisfazendo o enunciado, concluindo o que queríamos determinar.

Questão 4

Seja ABC um triângulo com lados de comprimentos $AC = 5$ cm, $AB = 6$ cm e $BC = 7$ cm. Determine o raio da circunferência circunscrita a ABC.

Solução 1:

Consideremos O o circuncentro do triângulo ABC, isto é, O é o centro da circunferência circunscrita a ABC.



Considere $\alpha = \angle ACB$ e R o raio da circunferência circunscrita a ABC. Pela lei dos cossenos sabemos que:

$$6^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos\alpha \Rightarrow 70\cos\alpha = 49 + 25 - 36.$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}.$$

Assim

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{361}{1225}} = \frac{\sqrt{864}}{35} = \frac{12\sqrt{6}}{35}.$$

Agora, pela lei dos senos aplicada ao triângulo ABC temos:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R \Rightarrow \frac{6}{\frac{12\sqrt{6}}{35}} = 2R,$$

logo o raio da circunferência circunscrita a ABC é:

$$R = \frac{6 \cdot 35}{24\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24},$$

concluindo o que queríamos.

Solução 2: Sejam $a := BC = 7\ cm$, $b := AB = 6\ cm$ e $c := AC = 5\ cm$ os comprimentos dos lados de ABC e $p = \frac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro de ABC. Pela fórmula de Heron sabemos que a área do triângulo é dada por

$$A_T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9(9-7)(9-6)(9-5)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}.$$

Por outro lado, seja R o raio da circunferência circunscrita a ABC sabemos que a área de ABC pode também ser calculada da seguinte forma:

$$A_T = \frac{abc}{4R} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{4R} = \frac{105}{2R}.$$

Portanto temos:

$$\frac{105}{2R} = 6\sqrt{6} \Rightarrow R = \frac{105}{12\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{35\sqrt{6}}{24},$$

concluindo o que queríamos.

Questão 5 Uma matriz 2×2 com entradas inteiras é uma tabela $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ composta por duas linhas e duas colunas de números inteiros $a_{ij}, i, j \in \{1, 2\}$. A *posição* do elemento a_{ij} da matriz A é, por definição, o par (i, j) associado a tal elemento. Chamamos de *determinante de* A o número

$$\det A := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Duas matrizes 2×2 de entradas inteiras M e N são ditas *amigas entre si* quando pode-se escolher duas entradas a e b de M e duas entradas c e d de N de forma que:

i) c ocupa em N a mesma posição que a ocupa em M;

ii) d ocupa em N a mesma posição que b ocupa em M;

iii) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é um múltiplo de 3.

Por exemplo as matrizes $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ são amigas entre si pois ao tomarmos $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ e $d = 5$ temos

- $c = 4$ ocupa em N a posição $(1, 1)$ e $a = 1$ ocupa em M a posição $(1, 1)$;
- $d = 5$ ocupa em N a posição $(1, 2)$ e $b = 2$ ocupa em M a posição $(1, 2)$;
- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -3$ que é múltiplo de 3.

a) Seja $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ uma matriz com entradas inteiras prove que M e $M^T := \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ são amigas entre si.

b) Seja S um conjunto formado por 5 matrizes de entradas inteiras prove que existem duas matrizes $M, N \in S$ que são amigas entre si.

Solução: a) Escreva

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Neste caso, temos que

$$M^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

A idéia é considerar as entradas nas posições (1,1) e (2,2) pois elas permanecem as mesmas em ambas as matrizes. De fato tomando $a = c = a_{11}$ e $b = d = a_{22}$ temos que o determinante da condição (iii) acima é dado por:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 0.$$

Como 0 é múltiplo de 3, conclui-se que M e M^T são matrizes amigas.

b) Seja M uma matriz quadrada de ordem 2 com entradas inteiras. Denote por $q(M)$ a quantidade de entradas de M que são múltiplas de 3. Provaremos alguns fatos preliminares.

- Lema 1: *Se $q(M) \geq 2$, então M é amiga de N, para qualquer que seja N.*
  Prova:
  De fato, escolha duas entradas diferentes de M que são múltiplas de 3, digamos $a = 3k$ e $b = 3k'$. Sejam c e d os valores nas mesmas coordenadas da entrada N, seja qual for a matriz N. Então

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = 3kd - 3k'c = 3(kd - k'c)$$

  é um múltiplo de 3. Isto conclui que M e N são amigas.

- Lema 2: *Sejam M e N matrizes quaisquer. Considere um par de entradas distintas (i_1, j_1) e (i_2, j_2). Então, se as entradas (i_1, j_1) e (i_2, j_2) de M possuem o mesmo resto de divisão por 3 entre si; assim como as entradas (i_1, j_1) e (i_2, j_2) de N coincidem o resto de divisão por 3 (mas não necessariamente é o mesmo que o resto das entradas de M), então M e N são amigas.*
  Prova:
  Isto é fácil de verificar. Sejam $a = 3a' + r_M$ e $b = 3b' + r_M$ as entradas (i_1, j_1) e (i_2, j_2) de M, e

$c = 3c' + r_N$ e $d = 3d' + r_N$ os valores nas mesmas coordenadas em N. Então o determinante fica

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$
$$= (3a' + r_M)(3d' + r_N) - (3b' + r_M)(3c' + r_N)$$
$$= 3z + r_M r_N - r_M r_N = 3z,$$

em que, $z = 3a'd' + a'r_N + d'r_M - 3b'c' - b'r_N - c'r_M$, mas sua expressão não é importante. Sendo tal determinante múltiplo de 3, concluimos que, nas hipóteses dadas, M e N são amigas.

- Lema 3: *Sejam M e N matrizes. Considere um par de entradas distintas (i_1, j_1) e (i_2, j_2). Então, se as entradas (i_1, j_1) e (i_2, j_2) de M possuem restos de divisão por 3 não nulos e diferentes entre si; assim como as entradas (i_1, j_1) e (i_2, j_2) de N possuem diferentes restos não nulos de divisão por 3, então M e N são amigas.*
  Prova:
  Seja $a = 3a' + r_M$ a entrada (i_1, j_1) de M. Então, sendo a entrada (i_2, j_2) de M com resto diferente de 0 e de r_M, podemos escrever que sua entrada é igual a $b = 3b' - r_M$. Da mesma forma, podemos escrever $c = 3c' + r_N$ e $d = 3d' - r_N$ para as entradas (i_1, j_1) e (i_2, j_2), respectivamente, de N. Assim, calculemos o determinante:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$
$$= (3a' + r_M)(3d' - r_N) - (3b' - r_M)(3c' + r_N)$$
$$= 3z' - r_M r_N + r_M r_N = 3z',$$

  em que a expressão de z' é calculável, mas não importante. Sendo tal número múltiplo de 3, conclui-se que M e N são amigas.

- Lema 4: *Se $q(M) = 0$, então M é amiga de N, para qualquer que seja N.*
  Prova:
  Pensando em algumas possibilidades, é fácil concluir que a condição do Lema 2 ou a condição do Lema 3 é satisfeita. Provaremos formalmente que tal fato realmente ocorre sempre. Concentremo-nos na matriz N. Se $q(N) \geq 2$, então M e N são amigas pelo Lema 1. Assuma então que $q(N) \leq 1$

e sejam (i_1, j_1), (i_2, j_2) e (i_3, j_3) entradas de N que não são múltiplas de 3. Note que, a menos de uma simetria, 3 casos podem ocorrer:

1. (i_1, j_1) e (i_2, j_2) possuem o mesmo resto na divisão por 3 e (i_1, j_1) e (i_3, j_3) possuem o mesmo resto na divisão por 3, o que implica que (i_2, j_2) e (i_3, j_3) possuem o mesmo resto na divisão por 3.
2. (i_1, j_1) e (i_2, j_2) possuem o mesmo resto na divisão por 3 e (i_1, j_1) e (i_3, j_3) não possuem o mesmo resto na divisão por 3, o que implica que (i_2, j_2) e (i_3, j_3) não possuem o mesmo resto na divisão por 3.
3. (i_1, j_1) e (i_2, j_2) não possuem o mesmo resto na divisão por 3 e (i_1, j_1) e (i_3, j_3) não possuem o mesmo resto na divisão por 3, o que implica que (i_2, j_2) e (i_3, j_3) possuem o mesmo resto na divisão por 3.

Assim, basta olhar se as entradas (i_1, j_1) e (i_2, j_2), e (i_1, j_1) e (i_3, j_3) de M coincidem ou não os restos na divisão por 3; e se o mesmo ocorre ou não com as respectivas entradas de N. Pelo menos um desses pares de entrada caem na condição do Lema 2 ou do Lema 3, ou, em último caso, as entradas (i_2, j_2) e (i_3, j_3) cairão na condição do Lema 2 ou do Lema 3 acima. Assim, concluímos que de qualquer forma se $q(M) = 0$ então estamos na condição do Lema 2 ou do Lema 3 e, portanto, M é amiga de N para qualquer que seja N.

- Lema 5: *Por fim, se M e N possuem uma mesma entrada (i, j) que é múltipla de 3, então elas são amigas.*
  Prova:
  Provar tal fato é similar ao Lema 1. Considere a entrada (i, j) e qualquer outra entrada. Então o determinante tomará a forma

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = 3kd - b3k' = 3(kd - k'b),$$

que é múltiplo de 3. Isto conclui que M e N são amigas.

A finalização da demonstração agora seguirá dos lemas demonstrados acima. Considere um conjunto com 5 matrizes 2×2 quaisquer. Se alguma das matrizes possui 0 entradas múltiplas de 3 então pelo Lema 4 ela deve ser amiga de qualquer outra matriz do conjunto e o problema está encerrado. Se alguma das matrizes possui 2, 3 ou 4 entradas múltiplas de 3, então ela será amiga de qualquer outra matriz do conjunto por conta do Lema 1 .

Basta então analisar o caso em que todas as matrizes possuem exatamente uma entrada múltipla de 3. Neste caso, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos duas matrizes irão possuir a entrada múltipla de 3 na mesma coordenada. Sendo assim, pelo Lema 5, ambas são amigas. Isto conclui a demonstração. $\square$